Warsztaty z analizy matematycznej dla studentów pierwszego roku

Granica ciągu

1. Powtórzenie wiadomości o ciągach

Ciąg *– przyporządkowanie wszystkim liczbom naturalnym z przedziału lub liczbom naturalnym dodatnim elementów z pewnego ustalonego zbioru. W pierwszym przypadku jest to ciąg* ***skończony***, *w drugim* ***nieskończony***.

9	**7**	**5**	**3**	**1**
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

Ciągi mogą mieć swój wzór. Dzięki niemu możemy obliczyć jego kolejne wyrazy.

Przykład:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{n^2}{n+1}}$$

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

…

Wzór rekurencyjny – pozawala obliczyć kolejny wyraz ciągu, wykorzystując poprzedni wcześniej obliczony.

Zadanie 1. Oblicz trzeci wyraz ciągu określonego wzorem:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - 6 \end{cases}$$

Wzór rekurencyjny – pozawala obliczyć kolejny wyraz ciągu, wykorzystując poprzedni wcześniej obliczony.

Zadanie 1. Oblicz trzeci wyraz ciągu określonego wzorem:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - 6 \end{cases}$$

$$a_2 = a_1 - 6$$

Wzór rekurencyjny – pozawala obliczyć kolejny wyraz ciągu, wykorzystując poprzedni wcześniej obliczony.

Zadanie 1. Oblicz trzeci wyraz ciągu określonego wzorem:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - 6 \end{cases}$$

$$a_2 = a_1 - 6 = 3 - 6 = -3$$

$$a_3 =$$

Wzór rekurencyjny – pozawala obliczyć kolejny wyraz ciągu, wykorzystując poprzedni wcześniej obliczony.

Zadanie 1. Oblicz trzeci wyraz ciągu określonego wzorem:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - 6 \end{cases}$$

$$a_2 = a_1 - 6 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 = a_2 - 6 = -3 - 6 = -9$$

Monotoniczność ciągów

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} = a_n$.

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

Monotoniczność ciągów

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} = a_n$.

Zadanie 2. Zbadać, czy ciąg nieskończony, którego wyraz ogólny ma postać $a_n = \frac{n}{2n+1}$, jest rosnący czy malejący.

$$a_{n+1} - a_n =$$

Monotoniczność ciągów

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} = a_n$.

Zadanie 2. Zbadać, czy ciąg nieskończony, którego wyraz ogólny ma postać $a_n = \frac{n}{2n+1}$, jest rosnący czy malejący.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1} =$$

Monotoniczność ciągów

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} = a_n$.

Zadanie 2. Zbadać, czy ciąg nieskończony, którego wyraz ogólny ma postać $a_n = \frac{n}{2n+1}$, jest rosnący czy malejący.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} =$$

Monotoniczność ciągów

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} = a_n$.

Zadanie 2. Zbadać, czy ciąg nieskończony, którego wyraz ogólny ma postać $a_n = \frac{n}{2n+1}$, jest rosnący czy malejący.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)}$$

Monotoniczność ciągów

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} = a_n$.

Zadanie 2. Zbadać, czy ciąg nieskończony, którego wyraz ogólny ma postać $a_n = \frac{n}{2n+1}$, jest rosnący czy malejący.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$$

Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, jeżeli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz (z wyjątkiem pierwszego) powstaje poprzez dodanie do poprzedniego pewnej stałej liczby r nazywaną różnicą ciągu arytmetycznego.

$$a_{n+1} = a_n + r$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Ciąg (a_n) nazywamy geometrycznym, jeżeli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia poprzedniego wyrazu poprzez pewną stałą liczbę $q \neq 0$.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1 \\ n \cdot a_1, q \geq 0 \end{cases}$$

2. Granica ciągu

Rozważmy ciąg określony wzorem:

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

Obliczmy kilka początkowych wyrazów tego ciągu (zamieścimy je w tabeli)

n	1	2	3	4	...	100	...	1000	...	100 000
a_n	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{8}{5}$		$\frac{200}{101}$		$\frac{2000}{1001}$		$\frac{200\,000}{100\,001}$

Im większy n wybierzemy, tym bardziej wartości zbliżają się do liczby 2.

Liczba g jest **granicą ciągu** nieskończonego (a_n) – co oznaczamy $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) znajdują się w odległości mniejszej niż ε od liczby g.

Liczba g jest **granicą ciągu** nieskończonego (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność | a_n- g |< ε.

Przydatne wzory:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 1 \quad gdy\ a = 1 \\ 0 \quad gdy\ a \epsilon (0,1) \\ +\infty \quad gdy\ a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ dla\ a \in R^+$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty\ dla\ a \in R^+$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e\ , gdy\ a_n \neq 0\ oraz\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Działania arytmetyczne granicach ciągów zbieżnych

Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{a}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \mathrm{b}$, przy dodatkowym założeniu, że b≠0 i b_n≠0 dla każdej liczby naturalnej dodatniej n, to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \mathrm{a} + \mathrm{b}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \mathrm{a} - \mathrm{b}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli dane są trzy ciągi nieskończone
$(a_n), (b_n), (c_n), \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$
oraz istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n > δ
prawdziwa jest nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n = g$

Przykład:

Zadanie 3. Obliczyć granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

Ciąg nieskończony (a_n) nazywamy **ciągiem rozbieżnym do plus nieskończoności** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n > δ zachodzi nierówność a_n> M.

Ciąg nieskończony (a_n) nazywamy ciągiem **rozbieżnym do minus nieskończoności** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n > δ zachodzi nierówność $a_n < $ M.

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$$

M – dowolna liczba rzeczywista

2n – 1 > M
2n > M + 1
n > $\frac{M+1}{2}$
Przyjmujemy, że δ = $\frac{M+1}{2}$
Dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n > δ spełniona jest nierówność 2n – 1 > M.

Dziękuję za uwagę

Przygotowała
Klaudia Wiśniewska