POCHODNE

Na podstawie www.matemaks.pl oraz materiałów przygotowanych przez dawnych członków koła StuDMat

Definicja pochodnej

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Iloraz różnicowy - to stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu funkcji.

Definicja pochodnej

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Iloraz różnicowy - to stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu funkcji.

Podanie wzoru ≠ Podanie definicji !!!

Definicja pochodnej

Załóżmy, że mamy daną funkcję $f(x)$ oraz argument x_0, w otoczeniu którego funkcja $f(x)$ jest określona. Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 oznaczamy symbolem:

$$f'(x_0)$$

i definiujemy jako granicę:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x + 1 - x_0^2 - x_0 - 1}{x - x_0} =$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x + 1 - x_0^2 - x_0 - 1}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x - x_0^2 - x_0}{x - x_0} =$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x + 1 - x_0^2 - x_0 - 1}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x - x_0^2 - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2 + x - x_0}{x - x_0} =$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x + 1 - x_0^2 - x_0 - 1}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x - x_0^2 - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2 + x - x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + x - x_0}{x - x_0} =$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x + 1 - x_0^2 - x_0 - 1}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x - x_0^2 - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2 + x - x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 1)}{x - x_0} =$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x + 1 - x_0^2 - x_0 - 1}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x - x_0^2 - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2 + x - x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 1)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} x + x_0 + 1$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x + 1 - x_0^2 - x_0 - 1}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x - x_0^2 - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2 + x - x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 1)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} x + x_0 + 1 = 2x_0 + 1$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$g(x) = \sin x$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$g(x) = \sin x$$

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$g(x) = \sin x$$

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$g(x) = \sin x$$

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{h} =$$

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$g(x) = \sin x$$

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{h} : \frac{1}{2} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{\frac{h}{2}} =$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$g(x) = \sin x$$

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin(\frac{x_0 + h - x_0}{2}) \cos(\frac{x_0 + h + x_0}{2})}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\frac{x_0 + h - x_0}{2}) \cos(\frac{x_0 + h + x_0}{2})}{h} : \frac{1}{2} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\frac{x_0 + h - x_0}{2}) \cos(\frac{x_0 + h + x_0}{2})}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \cos(\frac{2x_0 + h}{2})$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Definicja pochodnej - zadania

Zadanie 1. Obliczyć z definicji pochodne następujących funkcji:

$$g(x) = \sin x$$

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{h} : \frac{1}{2} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \cos(\frac{2x_0+h}{2}) = 1 \cdot \cos(\frac{2x_0}{2}) = \cos x_0$$

Wzory na pochodne wybranych funkcji

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Reguły obliczania pochodnych

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$$

$$\boxed{(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-1}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$\boxed{(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)}$$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-1}$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - (-1)x^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = x^2 \cos x$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = x^2 \cos x$$

$$\boxed{(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = x^2 \cos x$$

$$y' = 2x \cos x + x^2(-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$\boxed{(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$$

$$= \underbrace{(x^2-1)}\underbrace{(x^2-4)(x^2-9)}$$

$$\boxed{\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$$

$$= \underbrace{(x^2-1)}\,\underbrace{(x^2-4)(x^2-9)}$$

$$y' = 2x(x^2-4)(x^2-9) + (x^2-1)[(x^2-4)(x^2-9)]' =$$

$$\boxed{(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$$

$$= \underbrace{(x^2-1)}\underbrace{(x^2-4)(x^2-9)}$$

$$y' = 2x(x^2-4)(x^2-9) + (x^2-1)[(x^2-4)(x^2-9)]' =$$

$$= 2x(x^2-4)(x^2-9) + (x^2-1)[2x(x^2-9) + (x^2-4)\cdot 2x]$$

$$\boxed{(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$y' = \frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \cos^5 x$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \cos^5 x = (\cos x)^5$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$\boxed{\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)}$$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \cos^5 x = (\cos x)^5$$

$$y' = 5(\cos x)^4 \cdot$$

$$\boxed{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \cos^5 x = (\cos x)^5$$

$$y' = 5(\cos x)^4 \cdot (-\sin x)$$

$$\boxed{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \cos^5 x = (\cos x)^5$$

$$y' = 5(\cos x)^4 \cdot (-\sin x)$$

$$= -5 \sin x \cos^4 x$$

$$\boxed{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$\boxed{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)}$$

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x}$$

$$y' = \frac{2 \sin x \cdot \sin' x(1 + \sin x) - \sin^2 x \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$\boxed{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)}$$

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Obliczanie pochodnych - zadania

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji.

$$y = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x}$$

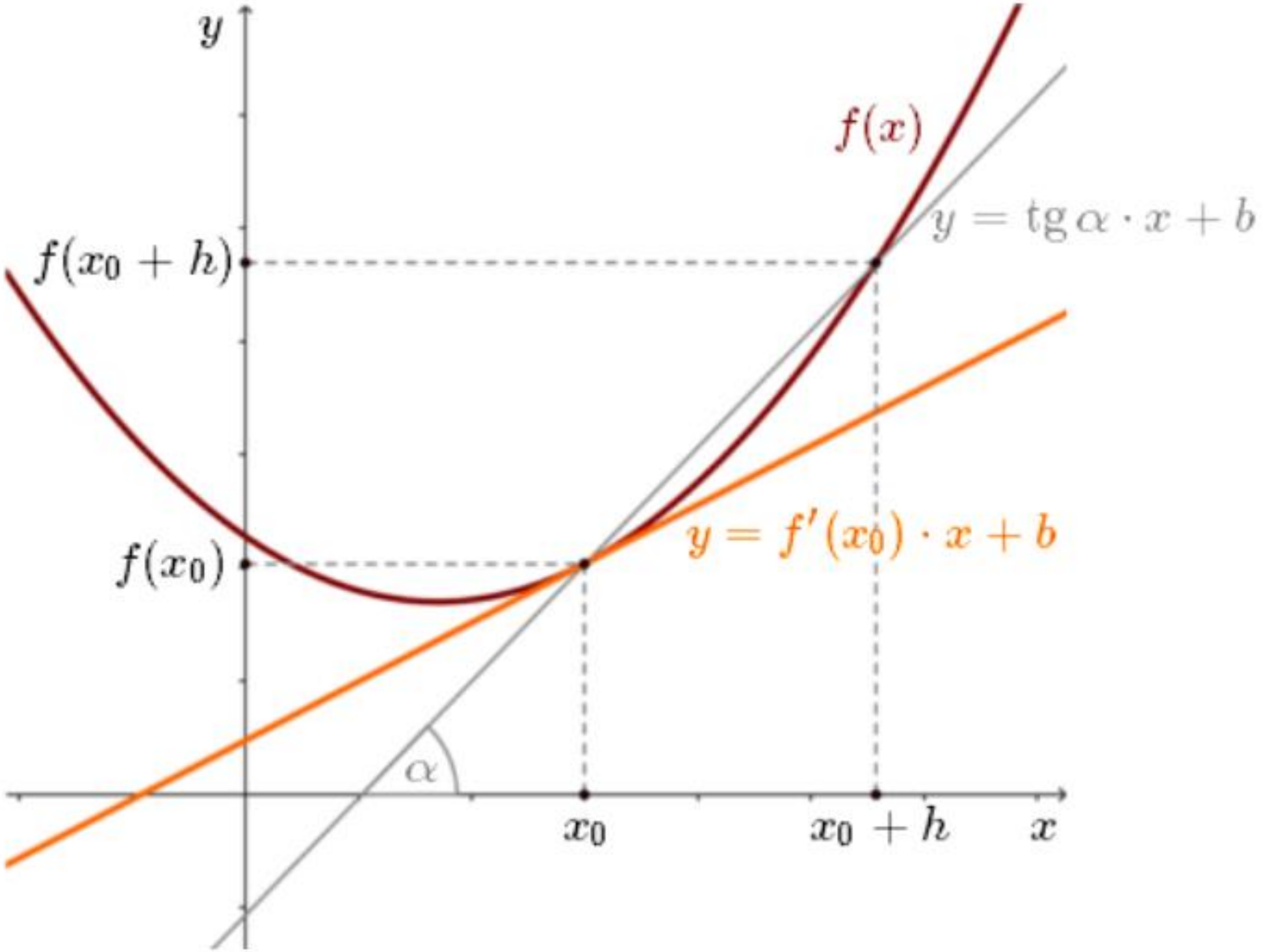
$$y' = \frac{2\sin x \cdot \sin' x(1 + \sin x) - \sin^2 x \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$
$$= \frac{2\sin x \cos x(1 + \sin x) - \sin^2 x \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$\boxed{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)}$$

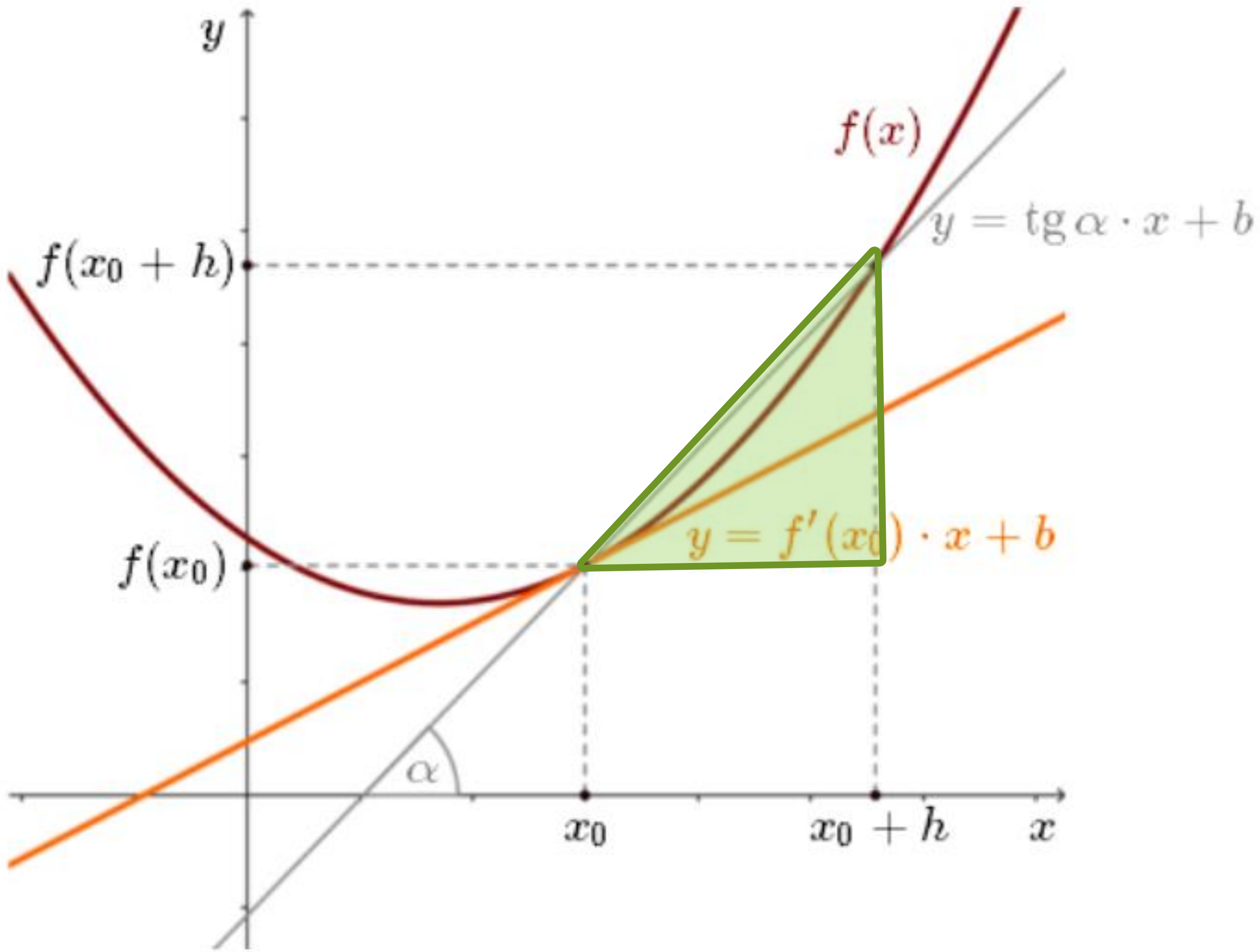
$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

Funkcja	Pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Interpretacja geometryczna pochodnej

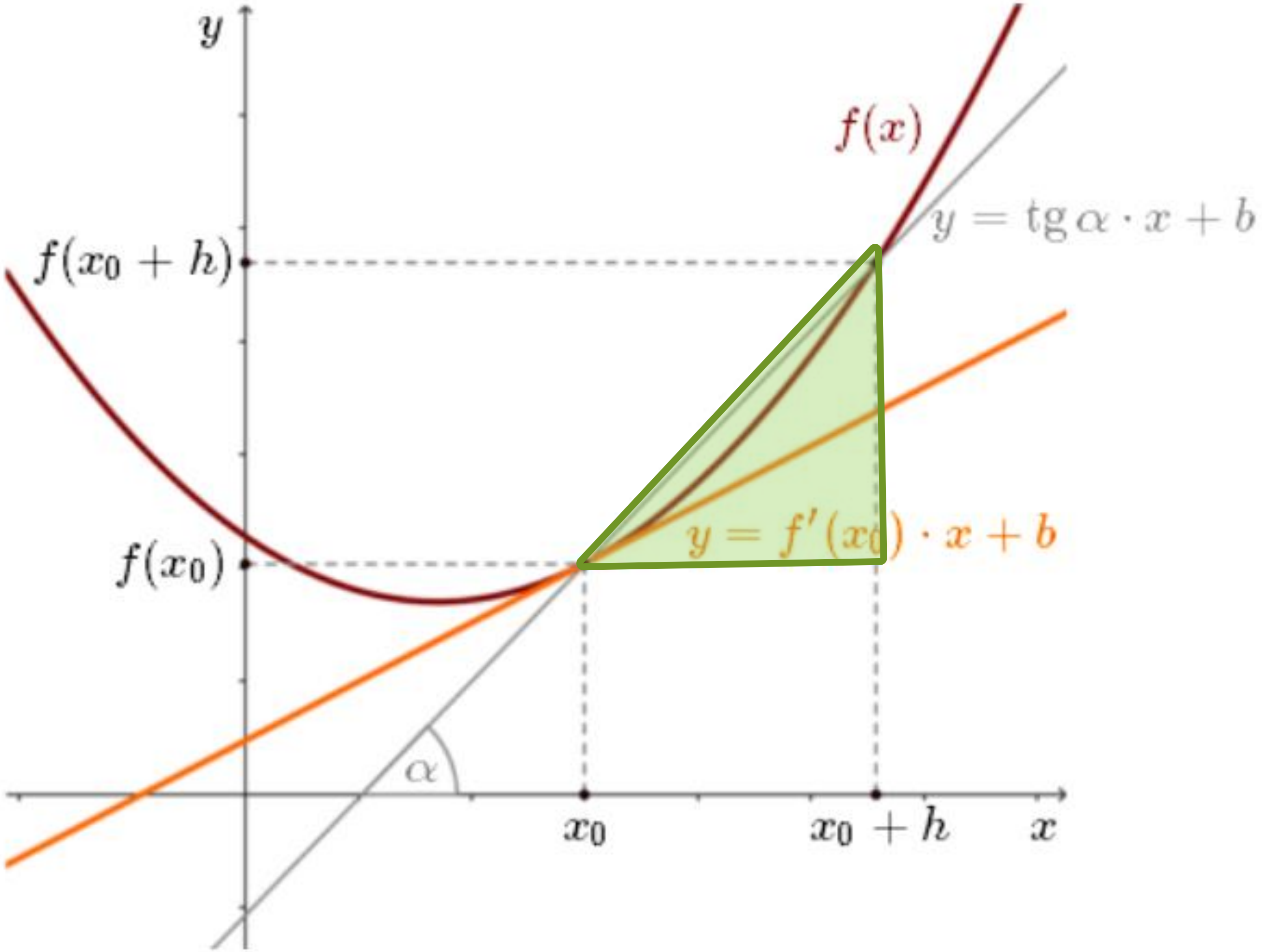


Interpretacja geometryczna pochodnej



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Interpretacja geometryczna pochodnej



$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{tg}\,\alpha = f'(x_0)$$

Interpretacja geometryczna pochodnej

Pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 - to współczynnik kierunkowy prostej stycznej do $f(x)$ w punkcie x_0.

Pochodna pokazuje nam jak funkcja zmienia się w danym punkcie. Dokładniej:

- Jeśli $f'(x_0) > 0$, to funkcja $f(x)$ **rośnie** w punkcie x_0.
- Jeśli $f'(x_0) = 0$, to funkcja $f(x)$ jest **stała** w punkcie x_0.
- Jeśli $f'(x_0) < 0$, to funkcja $f(x)$ **maleje** w punkcie x_0.

Inne oznaczenia i coś o całkach…

Czasami można spotkać się z innymi oznaczeniami:

1. $\dfrac{df(x)}{dx}$ (oznaczenie wprowadzone przez Leibniza)
2. $f'(x)$ (oznaczenie wprowadzone przez Lagrange'a)
3. $Df(x)$ (oznaczenie wprowadzone przez Cauchy'ego)

Jeśli funkcja jest dana wzorem: $y =$ [wzór funkcji], to pochodne oznaczamy w taki sposób:

1. $\dfrac{dy}{dx}$ (oznaczenie wprowadzone przez Leibniza)
2. y' (oznaczenie wprowadzone przez Lagrange'a)
3. Dy (oznaczenie wprowadzone przez Cauchy'ego)

Inne oznaczenia i coś o całkach…

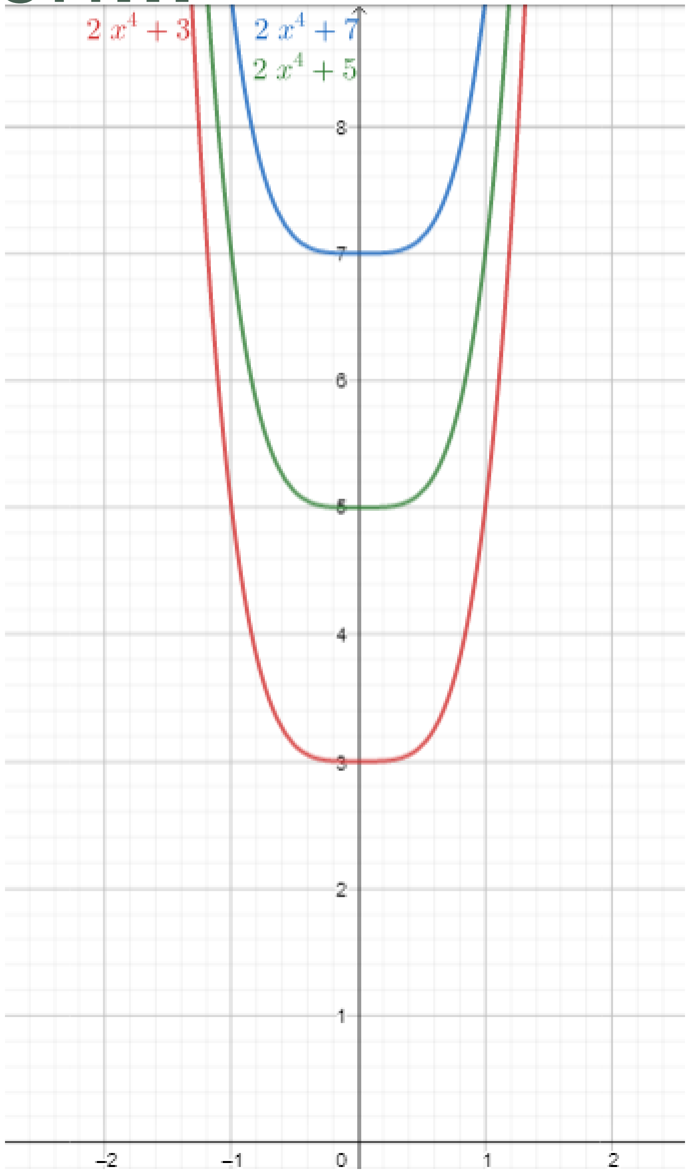
$$(2x^4 + 5)' = 8x^3$$

$$(2x^4 + 7)' = 8x^3$$

$$(2x^4 + 718732649163493864876)' = 8x^3$$

Dlatego…

$$\int 8x^3 dx = 2x^4 + C$$



Dziękuję za uwagę

Przypomnijcie mi o ankietach