ROZGRZEWKA Z MATMY!

Wstęp do algebry i teorii liczb

Natalia Lechna
natlec1@st.amu.edu.pl
StuDMat

OZNACZENIA

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych

$\forall$, $\bigwedge$ - kwantyfikator „dla każdego"

$\exists$, $\bigvee$ - kwantyfikator „istnieje"

DEF. DZIAŁANIE

Działaniem w zbiorze A nazywamy każdą funkcję $f: A \times A \to A, (a_1, a_2) \to f(a_1, a_2)$. Inaczej mówiąc jest to przyporządkowanie każdej parze elementów ze zbioru A pewnego elementu ze zbioru A.

Notacja: $f(a_1, a_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2$, $\langle A, * \rangle$

CZY PODANY ZBIÓR JEST DZIAŁANIEM?

1) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle, \langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle, \langle \mathbb{Z}, - \rangle, \langle \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, + \rangle$

2) $\langle \mathbb{N}, + \rangle, \langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$

3) $\langle \mathbb{N}, - \rangle$

4) $\langle \mathbb{N}, n^x \rangle$

5) $\langle \mathbb{R}, + \rangle, \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle, \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, : \rangle$

6) $\langle \mathbb{Q}, + \rangle, \langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle, \langle \mathbb{Q}, - \rangle, \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, : \rangle$

7) $\langle \mathbb{Z}, : \rangle$

8) $\langle \mathbb{Q}, : \rangle$

9) $\langle \mathbb{Q}, \oplus \rangle$

$$a \oplus b = a + b - \frac{1}{3}$$

10) $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \oplus \rangle$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

ZBIÓR $\mathbb{Z}_n$

Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Określmy zbiór $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,3, \dots, (n-1)\}$.

Przykład.

$n = 7$

$\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

WYPISZ ELEMENTY ZBIORÓW $\mathbb{Z}_n$, GDY

1) $n = 3$

2) $n = 10$

3) $n = 6$

$\bigwedge_{a,b\in\mathbb{Z}_n}$ określmy działania

$\underset{n}{+}$ dodawanie modulo n $\quad$ $a \underset{n}{+} b$ reszta z dzielenia zwykłej sumy $a + b$ przez n

$\underset{n}{\cdot}$ mnożenie modulo n $\quad$ $a \underset{n}{\cdot} b$ reszta z dzielenia zwykłego iloczynu $a \cdot b$ przez n

Przykład.

$\mathbb{Z}_7$ $\quad$ $5 \underset{7}{+} 6 = 4$ $\quad$ $5 \underset{7}{\cdot} 6 = 2$

WYKONAJ DZIAŁANIA

1) $3 \underset{4}{+} 5 =$

2) $4 \underset{6}{+} 2 =$

3) $7 \underset{5}{+} 7 =$

4) $2 \underset{7}{\cdot} 8 =$

5) $5 \underset{2}{\cdot} 5 =$

6) $9 \underset{5}{\cdot} 3 =$

DEF. WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ

Mówimy, że działanie $*$ określone w zbiorze A jest

- przemienne

  $\bigwedge_{a,b\in A} a * b = b * a$

- łączne

  $\bigwedge_{a,b,c\in A} (a * b) * c = a * (b * c)$

CZY DZIAŁANIE JEST ŁĄCZNE I PRZEMIENNE?

1) $a \oplus b = a^2 + ab + b^2$

CZY DZIAŁANIE JEST ŁĄCZNE I PRZEMIENNE?

2) $a \triangle b = a + b + 2$

CZY DZIAŁANIE JEST ŁĄCZNE I PRZEMIENNE?

3) $a \heartsuit b = 2a + 3$

CZY DZIAŁANIE JEST ŁĄCZNE I PRZEMIENNE?

4) $a \ast b = 7 + ab$

DEF. ELEMENT NEUTRALNY

Mówimy, że element $e \in A$ jest elementem neutralnym dla działania $*$ w zbiorze A, jeżeli $\bigwedge_{a \in A} a * e = e * a = a$.

Nie może istnieć więcej niż jeden element neutralny: $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$.

CZY DZIAŁANIE POSIADA ELEMENT NEUTRALNY?

1) $a \vartriangle b = a + b + 2$

CZY DZIAŁANIE POSIADA ELEMENT NEUTRALNY?

2) $a \heartsuit b = 2a + 3$

CZY DZIAŁANIE POSIADA ELEMENT NEUTRALNY?

3) $a \ast b = 7 + ab$

DEF. ELEMENT PRZECIWNY (ODWROTNY)

Element $a' \in A$ jest elementem przeciwnym (odwrotnym) do elementu $a \in A$ względem działania $*$ w zbiorze A, jeżeli spełniony jest warunek $a * a' = a' * a = e$.

Oznaczenie: $a^{-1} = a'$.

CZY DZIAŁANIE POSIADA ELEMENT PRZECIWNY (ODWROTNY)

1) $a \triangle b = a + b + 2$

DEF. GRUPY

Niech G będzie zbiorem, $*$ - działaniem w G ($*: G \times G \to G$).
Strukturę $\langle G, * \rangle$ nazywamy grupą, jeżeli spełnione są warunki

- $\bigwedge_{a,b,c \in G} (a * b) * c = a * (b * c)$ łączność
- $\exists_{e \in G} \bigwedge_{a \in G} a * e = e * a = a$ element neutralny
- $\bigwedge_{a \in G} \exists_{a' \in G} a * a' = a' * a = e$ element przeciwny/odwrotny

Jeżeli dodatkowo spełniony jest warunek $\bigwedge_{a,b \in G} a * b = b * a$, to grupę nazywamy przemienną (abelową).

CZY PODANY ZBIÓR JEST GRUPĄ ABELOWĄ?

1) $\langle \mathbb{R}, + \rangle$

CZY PODANY ZBIÓR JEST GRUPĄ ABELOWĄ?

2) $\langle R, - \rangle$

CZY PODANY ZBIÓR JEST GRUPĄ ABELOWĄ?

3) $\langle \mathbb{Z}, \ \cdot \rangle$

CZY PODANY ZBIÓR JEST GRUPĄ ABELOWĄ?

1) $\langle \mathbb{R}, * \rangle$

$a * b = ab - a - b + 2$

DEF. PIERŚCIENIA

Strukturę $\langle \mathrm{P}, +, \cdot \rangle$ nazywamy pierścieniem, jeżeli spełnione są następujące warunki

- $+, \cdot$ – działanie w P
- $\langle \mathrm{P}, + \rangle$ – grupa abelowa
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ - łączność mnożenia
- $\bigwedge_{a,b \in \mathrm{P}} \begin{matrix} a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{matrix}$ – rozdzielność mnożenia względem dodawania

CZY PODANY ZBIÓR JEST PIERŚCIENIEM?

1) $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$
$a + b = a + b + 1$
$a \cdot b = a + b + ab$