Przypomnienie informacji ze szkoły

Ciąg arytmetyczny

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, jeżeli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz (z wyjątkiem pierwszego) powstaje poprzez dodanie do poprzedniego pewnej stałej liczby r nazywaną różnicą ciągu arytmetycznego. Wyrazy ciągu arytmetycznego spełniają nierówności:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

oraz równoważnie

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

<u>Zadanie</u>

Podaj trzeci wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę:

a)

$$3, \qquad 7, \qquad 11\,, \qquad 15\,, \qquad 19, \qquad 23, \ldots$$

Odp. $a_3 = 11, r = 4$

b)

$$1, \qquad \frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{3}, \qquad 0\,, \qquad -\frac{1}{3}, \ldots$$

Odp. $a_3 = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}$

c)

$$\pi, \qquad 3\pi, \qquad 5\pi, \qquad 7\pi, \ldots$$

Odp. $\mathrm{a}_3 = 5\pi, \mathrm{r} = 2\pi$

Suma ciągu arytmetycznego o n wyrazach określona jest wzorem

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

<u>Zadanie</u>

Oblicz sumę ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 5n + 3$.

Rozwiązanie:

$$a_1 = 5 \cdot 1 + 3 = 8 \qquad\qquad a_n = 5n + 3$$

$$S_n = \frac{8 + 5n + 3}{2} \cdot n = \frac{5n + 11}{2} \cdot n = \frac{5n^2 + 11n}{2} = \frac{5}{2}n^2 + \frac{11}{2}n$$

Ciąg geometryczny

Ciąg (a_n) nazywamy geometrycznym, jeżeli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia poprzedniego wyrazu poprzez pewną stałą liczbę $q \neq 0$. Wyrazy ciągu geometrycznego spełniają równość:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

lub równoważenie

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Zadanie
Oblicz ilorazy ciągów geometrycznych.

a)

$$3, \quad 1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{27}, \dots$$

Odp. $q = \frac{1}{3}$

b)

$$1+\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}+\sqrt{6}, \quad 3+3\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{3}+3\sqrt{6}, \dots$$

Odp. $q = \sqrt{2}$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie q wyraża się wzorem:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n \cdot a_1, & q \geq 0 \end{cases}$$

<u>Zadanie</u>
Składniki powyższej sumy są wyrazami ciągu geometrycznego.

$$4 + 12 + 36 + \cdots + 4 \cdot 3^{10}$$

Oblicz tę sumę.

Rozwiązanie

$$a_1 = 4 \qquad a_n = 4 \cdot 3^{10} \qquad q = \tfrac{12}{4} = 3 \qquad n = 11$$

$$S_{11} = 4 \cdot \frac{1-3^{11}}{1-3} = 4 \cdot \frac{1 - 177\,147}{-2} = 354\,292$$

Podstawowe informacje o ciągach

Sposoby definiowania ciągów

Wzór ogólny

Pozwala w „łatwy” sposób obliczyć kolejne wyrazy ciągu, np.

$$a_n = 2n + 1 \qquad x_n = 2^{x-1} + x \qquad c_n = \log_2 n \qquad p_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Wzór rekurencyjny

Pozwala na obliczanie wyrazów ciągu poprzez odwoływanie się do wcześniej obliczonych wartości. Musi zawierać warunki początkowe, czyli wyrazy, do których na początku należy się odwołać, np.

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ n(n-1)! & \text{dla} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

<u>Zadanie</u>
Oblicz $5!$ korzystając ze wzoru ogólnego oraz rekurencyjnego ciągu.

Rozwiązanie:

Wzór ogólny:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Wzór rekurencyjny:

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120 \end{aligned}$$

Ciąg skończony i nieskończony

Ciąg (a_n) jest skończony, kiedy jego dziedziną jest podzbiór liczb naturalnych. (możemy policzyć, ile wyrazów ma ciąg).

Ciąg (a_n) jest nieskończony, kiedy jego dziedziną jest zbiór liczb naturalnych.

Uwaga: Suma nieskończonego ciągu geometrycznego wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}, \text{ gdzie } |q| < 1$$

<u>Zadanie</u>
Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego o $a_1 = 1$ i ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

$$S_n = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 2 = 2$$

Monotoniczność ciągu

Ciąg (a_n) jest rosnący, gdy $a_{n+1} > a_n$ lub równoważnie $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, o ile $a_n \neq 0$.

<u>Zadanie</u>
Zbadaj czy ciąg określony wzorem $a_n = n$ jest rosnący.

Rozwiązanie:

Zadajmy $a_{n+1} - a_n = n + 1 - n = 1 > 0$, stąd $a_{n+1} > a_n$, zatem jest to ciąg rosnący.

Ciąg (a_n) jest malejący, gdy $a_{n+1} < a_n$ lub równoważnie $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, o ile $a_n \neq 0$.

<u>Zadanie</u>
Zbadaj czy ciąg określony wzorem $a_n = \frac{1}{n}$ jest malejący.

Rozwiązanie:

Rozważmy $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} < 0$, stąd $a_{n+1} < a_n$ zatem jest to ciąg malejący.

Ograniczoność ciągu

Ciąg (a_n) jest ograniczony, kiedy istnieje taka liczba rzeczywista dodatnia taka, że:

$$|a_n| \leq M \iff -M \leq a_n \leq M.$$

Uwagi:

1) Mówmy, że ciąg jest ograniczony, kiedy jest ograniczony z góry i z dołu.
2) Ciąg może być ograniczony tylko z góry albo tylko z dołu, np. $a_n = n$ jest ograniczony z dołu przez 0 a z góry nie jest ograniczony, bo nie ma największej liczby rzeczywistej,
3) Jeżeli ciąg jest ograniczony, ale ograniczenie górne M_g i dolne M_d są różne, to liczbę M wybieramy tak, aby $\max(|M_g|, |M_d|)$, gdzie max oznacza większą z liczb.
4) Ograniczenie nie zawsze musi być najmniejsze z możliwych.

Przykład:
Ciąg $a_n = \sin n!$ jest ograniczony z dołu przez -1 a z góry przez 1, zatem $M = 1$, wobec tego $|\sin n!| < 1$.

<u>Zadanie</u>
Podaj ograniczenie ciągu określonego wzorem $a_n = \frac{2n+3}{2n}$.

Rozwiązanie:
Przekształćmy iloraz

$$a_n = \frac{2n+3}{2n} = \frac{2n}{2n} + \frac{3}{2n} = 1 + \frac{3}{2n}$$

Zauważmy, że $a_n \geq 1$ ponieważ sumę $1 + \frac{3}{2n}$ zmniejszymy, gdy zabierzemy" jeden z składników (w tym wypadku $\frac{3}{2n}$, bo organicznie ma być liczbą).

Wartość ułamka zwiększymy, gdy zwiększymy jego zwiększymy jego licznik, wówczas

$$\frac{3}{2n} \leq \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

zatem $a_n = 1 + \frac{3}{2n} < 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Łącząc te dwa fakty otrzymujemy $1 \leq a_n \leq \frac{5}{2}$, wobec czego ciąg (a_n) jest ograniczony. Gdybyśmy chcieli podać M zgodnie z definicją ograniczoności, to wybieramy $\max(1, \frac{5}{2}) = \frac{5}{2}$.

Definicja granicy ciągu

Definicja ciągu – rozumowanie intuicyjne

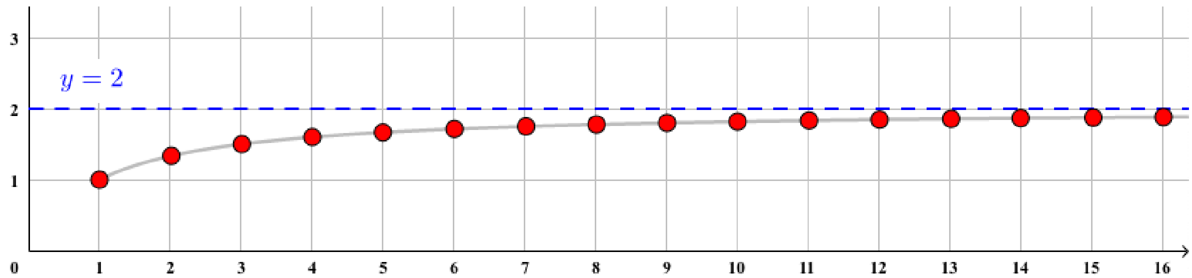
Rozważmy ciąg określony wzorem

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

Obliczmy kilka początkowych wyrazów tego ciągu (zamieścimy je w tabeli)

n	1	2	3	4	...	100	...	1000	...	100 000
a_n	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{8}{5}$		$\frac{200}{101}$		$\frac{2000}{1001}$		$\frac{200\,000}{100\,001}$

Zobrazujemy jeszcze, wykres tego ciągu.



Jak widzimy, im większe n weźmiemy, to wartości ciągu (a_n) zbliżają się do liczby 2.

Definicja formalna granicy

Liczbę g nazywamy granicą ciągu (a_n), jeżeli dla każdej liczby dodatniej $\mathcal{E}$ istnieje taka liczba naturalna n_0, że dla dowolnego $n > n_0$ jest spełniona nierówność:

$$|a_n - g| < \mathcal{E}$$

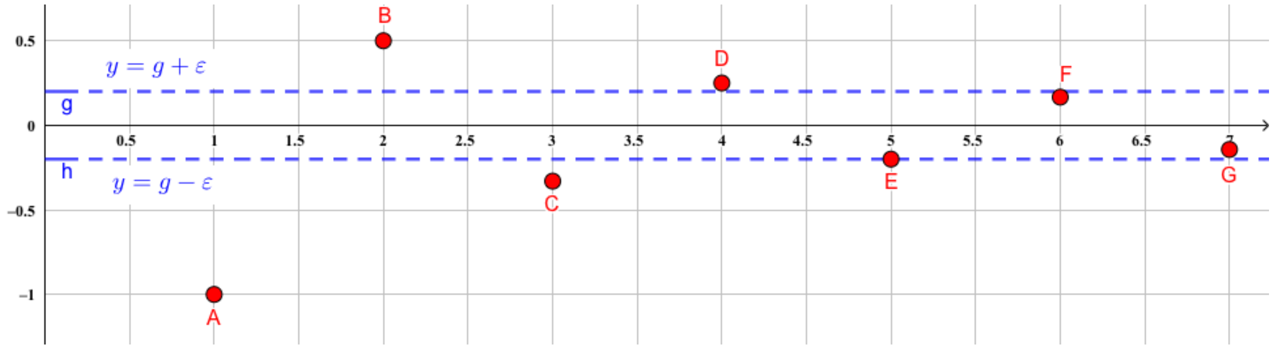
W języku kwantyfikatorów, możemy zapisać definicję granicy krócej, tzn.

$$\forall_{\mathcal{E}>0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{n>n_0} \ |a_n - g| < \mathcal{E}$$

Rozwiązując warunek $|a_n - g| < \mathcal{E}$ otrzymamy, że:

$$a_n < g + \mathcal{E} \text{ i } a_n > g - \mathcal{E}$$

Rozważmy ciąg $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Jego wykres prezentuje się następująco.



Oznacza to, że od pewnego miejsce n_0, różnica między wartością ciągu a jego granicą jest bardzo mała. W tym przypadku $n_0 = 6$.

Wzory i metody obliczania granic ciągów

Wzory, które warto znać

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a = 1 \\ 0 & \text{gdy } a \in (0,1) \\ +\infty & \text{gdy } a > 1 \end{cases}$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ dla } a \in \mathbb{R}^+$$

c)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \text{ o ile } a_n \neq 0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

e) (szczególny przypadek wzoru powyżej)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Własności granic skończonych

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ wówczas prawdziwe są równości:

1)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$
2)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$
3)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \frac{a}{b} \text{ o ile } b \neq 0$$

Twierdzenie o trzech ciągach (twierdzenie kanapkowe)

Niech dane będą trzy ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$ liczb rzeczywistych (ciągi o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych) takimi, że:

1) dla pewnego n_0 zachodzi nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Uwaga:
Nazwa „twierdzenie kanapkowe" wzięła się z tego, że kanapka składa się z: pieczywa, obkładu (np. sera) i pieczywa.

Przykład
Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym $b_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$.

Musimy znaleźć oszacowanie $\sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$.

Suma pod pierwiastkiem będzie większa, gdy zamiast dodawać $3^n + 5^n$ dodamy $7^n + 7^n$, zatem możemy napisać nierówność:

$$\sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{7^n + 7^n + 7^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 7^n} = 7 \cdot \sqrt[n]{3}$$

Suma pod pierwiastkiem będzie mniejsza, gdy pominiemy składniki $3^n + 5^n$, czyli

$$\sqrt[n]{7^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$$

Łącząc te fakty mamy:

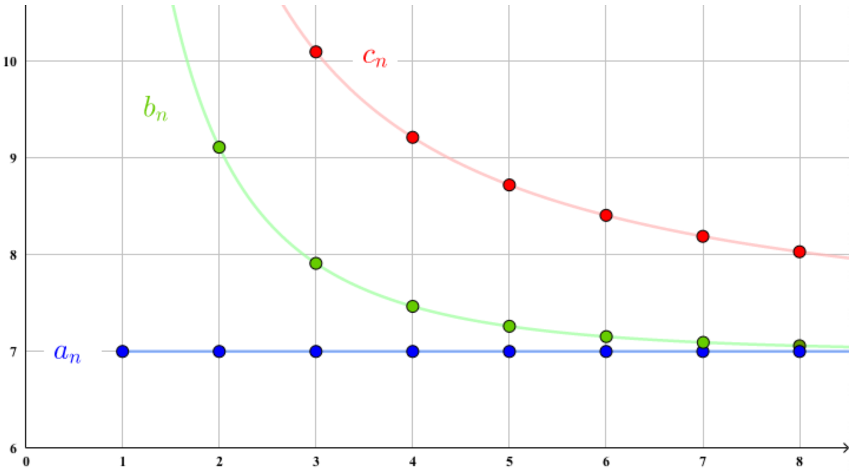
$$7 \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \leq 7 \cdot \sqrt[n]{3}$$

Wobec tego $a_n = 7$ stąd wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} 7 = 7$, analogicznie dla oszacowania górnego mamy:

$c_n = 7 \cdot \sqrt[n]{3}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} 7 \cdot \sqrt[n]{3} = 7 \cdot 1 = 7$.

Obliczyliśmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 7$, zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} = 7$.

Poniżej prezentujemy wykresy odpowiednich ciągów, aby zobrazować działanie powyższego twierdzenia.



Jak widzimy, ciąg b_n jest ograniczony przez (a_n) oraz (c_n). Dodatkowo granice ciągów $(a_n), (b_n), (c_n)$ są sobie równe.

Twierdzenie o ciągu zbieżnym do zera i ograniczonym

Jeżeli ciąga (a_n) jest zbieżny do zera oraz ciąg (b_n) jest ograniczony, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Przykład

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{\sin n}{n}$.

Zbiorem wartości funkcji sinus jest przedział $[-1, 1]$, czyli jest ona ograniczona. Ciąg $\frac{1}{n}$ jest zbieżny do zera. Na mocy twierdzenia o ciągu zbieżnym do zera i ograniczonym mamy, że:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$$

Zadania

Proste granice ciągów

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-7n}{3n^2+9n-5}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3-4n}{3n+5n^3}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^5-3n}{11n^2}$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{n^2}$$

e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(\mathrm{n}+1)!}{(n-1)!\ \cdot(\mathrm{n}+2)!}$$

f)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 3^{n+1}+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+4^{n+2}}$$

g)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 4^n+10^{n+1}}{2\cdot 11^n+5\cdot 7^n}$$

h)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

i)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+n^2}-n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Granice z liczbą e

Obliczyć następujące granice ciągów:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^{2n+4}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3}{n^3+1}\right)^{2n^2+5}$$

e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-3}$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, oblicz następujące granice:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^n+9^n+8^n}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\cdot 3^n+4\cdot 7^n}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{8}\right)^n}$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\sin n}$$

Twierdzenie o ciągu zbieżnym do zera i ograniczonym

Korzystając z twierdzenia o ciągu zbieżnym do zera i ograniczonym oblicz granice:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cdot\sin(3n+1)$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^3+1}\cdot\cos(n!)$$

Rozwiązania

PROSTE GRANICE CIĄGÓW

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-7n}{3n^2+9n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\,(5-\underbrace{\frac{7}{n}}_{\to 0})}{\cancel{n^2}\,(3+\underbrace{\frac{9}{n}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{5}{n^2}}_{\to 0})}=\frac{5}{3}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3-4n}{3n+5n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\,(7-\underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\to 0})}{\cancel{n^3}\,(5+\underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0})}=\frac{7}{5}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^5-3n}{11n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{n^3}{\cancel{n^5}}\,(8-\underbrace{\frac{3}{n^4}}_{\to 0})}{11\cancel{n^2}}=+\infty$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2}$$

W liczniku mamy sumę ciągu arytmetycznego o $a_1=1$, $a_n=3n-2$ oraz $r=3$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+3n-2}{2}\cdot n=\frac{3n-1}{2}\cdot n=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(3n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cancel{n^2}(3-\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0})}{\cancel{n^2}}=\frac{3}{2}$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)!}{(n-1)!\cdot(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cancel{(n-1)!}\cdot\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n-1)!}\cdot(n+2)\cancel{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0})}=1$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 3^{n+1}+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+4^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 3\cdot 3^n+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+16\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12\cdot 3^n+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+16\cdot 4^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{4^n}\left(12\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0}+2\right)}{\cancel{4^n}\left(5\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{4}\right)^n}_{\to 0}+16\right)}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

g) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 4^n+10^{n+1}}{2\cdot 11^n+5\cdot 7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 4^n+10\cdot 10^n}{2\cdot 11^n+5\cdot 7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n\left(5\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^n+10\right)}{11^n\left(2+5\cdot\left(\frac{7}{11}\right)^n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{10}{11}\right)^n}_{\to 0}\cdot\frac{5\underbrace{\left(\frac{4}{10}\right)^n}_{\to 0}+10}{2+5\cdot\underbrace{\left(\frac{7}{11}\right)^n}_{\to 0}}=\left[0\cdot\frac{5\cdot 0+10}{2+5\cdot 0}=0\cdot\frac{10}{2}=5\right]=5$$

$$h)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot 1 = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

wzór: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{n+1}}_{\to+\infty}+\underbrace{\sqrt{n}}_{\to+\infty}} = 0$$

wzór: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+n^2}-n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+n^2}-n}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{4+n^2}+n}{\sqrt{4+n^2}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+n^2-n^2}{\sqrt{n^2+1}\cdot\left(\sqrt{4+n^2}+n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\underbrace{\sqrt{n^2+1}}_{\to+\infty}\cdot\left(\underbrace{\sqrt{4+n^2}}_{\to+\infty}+\underbrace{n}_{\to+\infty}\right)} = 0$$

GRANICE Z LICZBĄ e

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}_{\to e}\Big]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^{2n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{2n+4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{\frac{5}{n}}\right\}^{2n+4} = \lim_{n\to\infty}\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}}_{\to e}\Big]^{10+\overbrace{\frac{20}{n}}^{\to 0}} = e^{10}$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}}_{\to e}\Big]^{\overbrace{-\frac{1}{n}}^{\to 0}} = e^0 = 1$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3}{n^3+1}\right)^{2n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3+1}\right)^{2n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+1}{2}}\right)^{2n^2+5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+1}{2}}\right)^{\frac{n^3+1}{2}}\right]^{\frac{2}{n^3+1}}\right\}^{2n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+1}{2}}\right)^{\frac{n^3+1}{2}}}_{\to e}\Big]^{\overbrace{\frac{2n^2+5}{n^3+1}}^{\to 0}} = e^0 = 1$$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{2n^2-3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}\right]^{-\frac{1}{n^2}}\right\}^{2n^2-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}}_{\to e}\right]^{-2+\underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0}} = e^{-2}$

TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^n+9^n+8^n}$

Musimy oszacować wyrażenie pod pierwiastkiem

$$10^n \leq 10^n+9^n+8^n \leq 10^n+10^n+10^n = 3\cdot 10^n$$

zatem:

$a_n = \sqrt[n]{10^n} = 10$ oraz $c_n = \sqrt[n]{3\cdot 10^n} = 10\sqrt[n]{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 10 = 10$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} 10\underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\to 1} = 10$

stąd $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^n+9^n+8^n} = 10$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\cdot 3^n+4\cdot 7^n}$

$$\underbrace{4\cdot 7^n}_{a_n=\sqrt[n]{4\cdot 7^n}} \leq 2\cdot 3^n+4\cdot 7^n \leq 2\cdot 7^n+4\cdot 7^n = \underbrace{6\cdot 7^n}_{c_n=\sqrt[n]{6\cdot 7^n}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4\cdot 7^n} = 7$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6\cdot 7^n} = 7$ zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\cdot 3^n+4\cdot 7^n} = 7$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n}$

$$\underbrace{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{a_n=\sqrt[n]{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}} \le \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n \le \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \le$$
$$\le \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \underbrace{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{c_n=\sqrt[n]{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n} = \frac{1}{2}$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3+\sin n}$

$$\underbrace{2}_{a_n=\sqrt[n]{2}} = 3-1 \le 3+\sin n \le 3+1 = \underbrace{4}_{c_n=\sqrt[n]{4}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} = 1$ zatem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3+\sin n} = 1$$

TWIERDZENIE O CIĄGU ZBIEŻNYM DO ZERA I OGRANICZONYM

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{a_n} \cdot \underbrace{\sin(3n+1)}_{b_n}$

$\sin(3n+1)$ jest ograniczony ponieważ zbiorem wartości funkcji $\sin x$ jest przedział $[-1, 1]$

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{\cancel{n}^{\,1}}{\cancel{n^2}^{\,n}(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0})\underbrace{n}_{\to +\infty}} \to 0$$, gdy $n \to \infty$, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot \sin(3n+1) = 0$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^3+1}}_{a_n} \cdot \underbrace{\cos(n!)}_{b_n}$$

$\cos(n!)$ jest ograniczony, ponieważ zbiór jego wartości to przedział $[-1,1]$.

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^3+1} = \frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n^3+1} = \frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^3+1} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{n^2}^{\,1}\cancel{(\frac{1}{n}+1)}^{\,1}}{\cancel{n^3}^{\,n}\cancel{(1+\frac{1}{n})}^{\,1}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2n} \to 0$$ gdy $n\to\infty$, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^3+1} \cdot \cos(n!) = 0$$