

ROZGRZEWKĄ Z MATMY!

Wstęp do algebry i teorii liczb

Natalia Lechna

StuDMat



OZNACZENIA

\mathbb{N} - zbiór liczb naturalnych

\mathbb{Z} - zbiór liczb całkowitych

\mathbb{Q} - zbiór liczb wymiernych

\mathbb{R} - zbiór liczb rzeczywistych

\mathbb{C} - zbiór liczb zespolonych

\forall, \wedge - kwantyfikator „dla każdego”

\exists, \vee - kwantyfikator „istnieje”

DEF. DZIAŁANIE

Działaniem w zbiorze A nazywamy każdą funkcję $f: A \times A \rightarrow A, (a_1, a_2) \rightarrow f(a_1, a_2)$.
Inaczej mówiąc jest to przyporządkowanie każdej parze elementów ze zbioru A pewnego elementu ze zbioru A .

Notacja: $f(a_1, a_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2, \langle A, * \rangle$

CZY PODANY ZBIÓR JEST DZIAŁANIEM?

1) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle, \langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle, \langle \mathbb{Z}, - \rangle, \langle \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, + \rangle$

2) $\langle \mathbb{N}, + \rangle, \langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$

3) $\langle \mathbb{N}, - \rangle$

4) $\langle \mathbb{N}, n^x \rangle$

5) $\langle \mathbb{R}, + \rangle, \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle, \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, : \rangle$

6) $\langle \mathbb{Q}, + \rangle, \langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle, \langle \mathbb{Q}, - \rangle, \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, : \rangle$

7) $\langle \mathbb{Z}, : \rangle$

8) $\langle \mathbb{Q}, : \rangle$

9) $\langle \mathbb{Q}, \oplus \rangle$

$$a \oplus b = a + b - \frac{1}{3}$$

10) $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \oplus \rangle$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

ZBIÓR \mathbb{Z}_n

Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Określmy zbiór $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)\}$.

Przykład.

$$n = 7$$

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

WYPISZ ELEMENTY ZBIORÓW \mathbb{Z}_n , GDY

1) $n = 3$

2) $n = 10$

3) $n = 6$

$\Lambda_{a,b \in \mathbb{Z}_n}$ określmy działania

$\overset{+}{n}$ dodawanie modulo n

$\overset{\cdot}{n}$ mnożenie modulo n

$a \overset{+}{n} b$ reszta z dzielenia zwykłej sumy $a + b$ przez n

$a \overset{\cdot}{n} b$ reszta z dzielenia zwykłego iloczynu $a \cdot b$ przez n

Przykład.

$$\mathbb{Z}_7 \quad 5 \overset{+}{7} 6 = 4 \quad 5 \overset{\cdot}{7} 6 = 2$$

WYKONAJ DZIAŁANIA

1) $3 \frac{+}{4} 5 =$

2) $4 \frac{+}{6} 2 =$

3) $7 \frac{+}{5} 7 =$

4) $2 \frac{\cdot}{7} 8 =$

5) $5 \frac{\cdot}{2} 5 =$

6) $9 \frac{\cdot}{5} 3 =$

DEF. WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ

Mówimy, że działanie $*$ określone w zbiorze A jest

- przemienne

$$\bigwedge_{a,b \in A} a * b = b * a$$

- łączne

$$\bigwedge_{a,b,c \in A} (a * b) * c = a * (b * c)$$

CZY DZIAŁANIE JEST ŁĄCZNE I PRZEMIENNE?

1) $a \oplus b = a^2 + ab + b^2$

2) $a \Delta b = a + b + 2$

3) $a \heartsuit b = 2a + 3$

4) $a \star b = 7 + ab$

DEF. ELEMENT NEUTRALNY

Mówimy, że element $e \in A$ jest elementem neutralnym dla działania $*$ w zbiorze A , jeżeli $\bigwedge_{a \in A} a * e = e * a = a$.

Nie może istnieć więcej niż jeden element neutralny: $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$.

CZY DZIAŁANIE POSIADA ELEMENT NEUTRALNY?

1) $a \Delta b = a + b + 2$

2) $a \heartsuit b = 2a + 3$

3) $a \star b = 7 + ab$

DEF. ELEMENT PRZECIWNY (ODWROTNY)

Element $a' \in A$ jest elementem przeciwnym (odwrotnym) do elementu $a \in A$ względem działania $*$ w zbiorze A , jeżeli spełniony jest warunek $a * a' = a' * a = e$.

Oznaczenie: $a^{-1} = a'$.

CZY DZIAŁANIE POSIADA ELEMENT PRZECIWNY (ODWROTNY)

$$1) a \Delta b = a + b + 2$$

DEF. GRUPY

Niech G będzie zbiorem, $*$ - działaniem w G ($*$: $G \times G \rightarrow G$).
Strukturę $\langle G, * \rangle$ nazywamy grupą, jeżeli spełnione są warunki

- $\bigwedge_{a,b,c \in G} (a * b) * c = a * (b * c)$ łączność
- $\exists_{e \in G} \bigwedge_{a \in G} a * e = e * a = a$ element neutralny
- $\bigwedge_{a \in G} \exists_{a' \in G} a * a' = a' * a = e$ element przeciwny/odwrotny

Jeżeli dodatkowo spełniony jest warunek $\bigwedge_{a,b \in G} a * b = b * a$, to grupę nazywamy przemienną (abelową).

CZY PODANY ZBIÓR JEST GRUPĄ ABELOWĄ?

- 1) $\langle \mathbb{R}, + \rangle$
- 2) $\langle \mathbb{R}, - \rangle$
- 3) $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$

CZY PODANY ZBIÓR JEST GRUPĄ ABELOWĄ?

1) $\langle \mathbb{R}, * \rangle$

$$a * b = ab - a - b + 2$$